CAHIERS AFRICAINS DES DROITS DE L'HOMME ET DE LA DÉMOCRATIE
AINSI QUE DU DÉVELOPPEMENT DURABLE
REVUE AFRICAINE INTERDISCIPLINAIRE

ISSN : 2791-1063 (Imprimé)
ISSN : 2791-1071 (En ligne)

25ème année - Numéro 72 - Volume 2 - Juillet-Septembre 2021

OPÉRATIONS ET RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS ET SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DANS UN ENSEMBLE QUOTIENT Z/Zn

Par

Elie VUBU KULUNGU

Assistant à l'Institut Supérieur de Techniques Appliquées de Lukula à Boma

RÉSUMÉ

Partant d'une relation d'équivalence R définie dans un ensemble Z des entiers, nous construisons un ensemble quotient Zn (ou Z/Zn), avec ''n'' un naturel non nul et différent de l'unité 1, dans lequel les éléments sont des classes d'équivalence.

Un élément de Zn, noté « à » sera appelé classe d'équivalence de a, avec '' a '' un nombre naturel.

Dans cet ensemble quotient, il nous sera question de présenter des méthodes pratiques de calcul pour expliciter l'addition, la multiplication et la soustraction des classes d'équivalence.

Ainsi donc, une connaissance approfondie sur ces opérations dans Zn s'avère indispensable et est assurément recommandée afin de réussir aisément la résolution des équations et systèmes d'équations linéaires dans un ensemble quotient donné.

ABSTRACT

Going to R equivalence relationship defined in a Z set of enters, we build (construct) a Zn quotient set (or Z/Zn) with '' n '' a non-natural nil and different from unit 1 (one), in with element are classes equivalent.

A Zn element, marked « à » will be called equivalent class of a, with '' a '' natural number.

In this quotient set, it will be a question of presenting practical methods of calculation, to explicit the addition process, the multiplication and subs traction classes of equivalence.

Therefore, a deep knowledge on such operations in Zn is very indispensable and linear equations systems in a given quotient set.

INTRODUCTION

La résolution d'une équation ou d'un système d'équations ne peut être effectuée que dans un ensemble bien défini en extension. L'objectif de cette publication est double : d'une part, la connaissance et la maîtrise d'un ensemble appelé « ensemble quotient » dans lequel s'effectuent différentes opérations mathématiques et d'autre part proposer des méthodes de résolutions beaucoup plus pratiques et cohérentes, dans cet ensemble.

Dans ces pages reliées sous le titre « ***opérations et résolution des équations et systèmes d'équations du premier degré à deux inconnues dans un ensemble quotient*** », il est question de définir des méthodes pratiques et simples pouvant faciliter la construction de l'ensemble quotient Z/nZ, les opérations ainsi que la résolution des équations dans cet ensemble.

Hormis l'introduction et la conclusion, l'ouvrage que nous présentons s'articule en trois parties. Dans la première partie, nous aurons intérêt à construire l'ensemble quotient Z/nZ avant de déterminer sa structure algébrique.

La seconde partie est réservée aux opérations, c'est-à-dire ; l'addition, la multiplication et la soustraction qui seront précédées par un bref rappel sur la numération.

Et enfin, la dernière sera consacrée à la résolution des équations et systèmes d'équations linéaires du premier degré à deux inconnues dans un ensemble quotient.

I. CONCEPTS CLÉS

I.1. Structure d'anneau

- Une opération mathématique ''∗'', autrement appelée une loi de composition dans un ensemble A, est dite interne, si $(\forall a, b \in A)$; $a * b \in A$.

  Considérons dans cette ensemble A deux lois de composition internes ; l'addition ''+'' et la multiplication ''x''. Le triplet $(A, +, x)$ a la ***structure d'un anneau*** si :

  - (A, +) est un groupe commutatif.
    C'est-à-dire, l'addition est commutative, associative, admet un élément neutre unique et tout élément de l'ensemble A possède un symétrique (ou un opposé).

- (A, x) est un demi-groupe.
  C'est-à-dire, la multiplication est associative.
- La multiplication est distributive par rapport à l'addition dans l'ensemble A.
  Ce qui s'écrit : ($\forall$a, b, c $\in$A) ; a x (b + c) = (a x b) + (a x c), ou

  (a + b) x c = (a x c) + (b x c)

- Si (A, +, x) est un anneau et que la loi ''x'' est commutative, alors (A, +, x) est un ***anneau commutatif***.
- Si de plus la multiplication ''x'' admet un élément neutre unique, alors (A, +,x) est un ***anneau commutatif unitaire***[1].

I.2. Anneau intègre

Considérons a ≠ 0 et b ≠ 0 des éléments non nuls de l'ensemble A muni de la multiplication ''x''. Si a x b = 0, alors nous appelons a et b des ***diviseurs de zéro***.

Cependant, lorsque l'anneau (A, +, x) n'admet pas des diviseurs de zéro, celui-ci sera appelé ***anneau intègre***.

Par contre, un anneau qui contient des diviseurs de zéro est appelé ***anneau non intègre.***

II. L'ENSEMBLE QUOTIENT Z/nZ

Dans cette partie, notre objectif est de réussir la définition en extension de l'ensemble quotient Z/nZ et enfin, déterminer sa structure lorsqu'il est muni de l'addition et de la multiplication.

Toutefois, nous supposons connue la structure de (Z, +, x) qui est un anneau commutatif unitaire intègre.

II.1. Construction de Z/nZ

a) Cas particulier

Définissons dans l'ensemble Z des entiers, la relation '' R '' définie par :
($\forall$x, y $\in$ Z) : (x R y $\Leftrightarrow$ x – y $\in$ 5Z),

[1] Ch. PISCOT et M. ZAMANSKY, *Introduction à l'algèbre et l'analyse moderne*, 3e Edition, Dunod, Paris, 1967, pp.33-46.

avec 5Z l'ensemble des multiples de 5. Montrons que la relation R est une relation d'équivalence et définissons en extension l'ensemble quotient Z/5Z = Z_5.

- ***Réflexivité*** : Montrons que :($\forall x \in 5Z$) ; x R x

En effet ;

($\forall x \in 5Z$) : x R x $\Leftrightarrow$ x – x = 0 $\in$ 5

D'où, x R x. La relation est réflexive.

- ***Symétrie*** : Montrons que : ($\forall x, y \in 5Z$) : (x R y $\Rightarrow$ y R x)

En effet,

x R y	$\Leftrightarrow$ x – y $\in$ 5Z,	(définition de R)
	$\Leftrightarrow$ – (x – y) $\in$ 5Z,	(tout élément de Z est symétrisable)
	$\Leftrightarrow$ y – x $\in$ 5Z,	(distributivité de la multiplication par rapport à la soustraction dans Z)
	$\Leftrightarrow$ y R x	(définition de R).

D'où ; x R y $\Rightarrow$ y R x. La relation est symétrique.

- ***Transitivité*** : Montrons que x R y et y R z[2] $\Rightarrow$ x R z.

En effet,

x R y et y R z	$\Rightarrow$ x – y $\in$ 5Z et y – z $\in$ 5Z,	(définition de R)
	$\Rightarrow$ x – y + y – z $\in$ 5Z,	(+ interne dans Z)
	$\Rightarrow$ x – z $\in$ 5Z	(y opposé de –y)
	$\Rightarrow$ x R z	(définition de R).

D'où ;

x R y et y R z $\Rightarrow$ x R z. La relation est transitive.

Ainsi donc, la relation R étant réflexive, symétrique et transitive, elle est donc une ***relation d'équivalence***[2].

Déterminons les classes d'équivalence. Ici, dans l'ensemble 5Z, il y aura 5 classes d'équivalence qui sont : les classes de 0, de 1, de 2, de 3 et de 4, qui sont notées respectivement par : $\dot{0}$, $\dot{1}$, $\dot{2}$, $\dot{3}$, $\dot{4}$.

[2] M. QUEYSANNE, *Algèbre MP & spéciales AA'*, Armand Colin, Paris, 1971, pp 18-25.

Par définition, la *classe d'équivalence* de x, notée $\dot{x}$; est l'ensemble des entiers qui sont en relation avec x, conformément à la relation définie ci-haut[3].

Pour cette raison, nous définirons en extension chacune des classes comme suit :

$\dot{0} = \{\ldots,-10,-5, 0, 5, 10, 15,\ldots, 5k+0,\ldots\} = 0+5Z$
$\dot{1} = \{\ldots, -9, -4, 1, 6, 11, 16,\ldots, 5k+1,\ldots\} = 1+5Z$
$\dot{2} = \{\ldots, -8, -3, 2, 7, 12, 17,\ldots, 5k+2,\ldots\} = 2+5Z$
$\dot{3} = \{\ldots, -7, -2, 3, 8, 13, 18,\ldots, 5k+3,\ldots\} = 3+5Z$
$\dot{4} = \{\ldots, -6, -1, 4, 9, 14, 19, \ldots, 5k+4,\ldots\} = 4+5Z$

- Remarques :
  - Chaque classe est en relation avec elle-même,
  - Ces classes sont deux à deux disjointes,
  - L'union de ces classes est l'ensemble Z/5Z ou Z_5.

Disons que ces classes constituent une partition de Z_5.[4]

En définitive, retenons que *l'ensemble quotient* est l'ensemble de toutes les classes d'équivalence[5].

Pour cette raison, nous définissons en extension l'ensemble quotient Z_5 comme suit :

$Z/5Z = Z_5 = \{\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}, \dot{3}, \dot{4}\}$

b) Cas général

Nous référant au cas particulier, nous retenons que si :

$n = 2 ; \quad Z_2 = \{\dot{0}, \dot{1}\}$
$n = 3 ; \quad Z_3 = \{\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}\}$
$n = 4 ; \quad Z_4 = \{\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}, \dot{3}\}$
$n = 5 ; \quad Z_5 = \{\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}, \dot{3}, \dot{4}\}$

De cette expérience, nous pouvons déduire que :

$$Z/nZ = Z_n = \{\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}, \dot{3}, \dot{4}, \ldots, \overbrace{\dot{n-2}}, \overbrace{\dot{n-1}}\}$$

II.2. Structure de $(Zn, \dot{+}, \dot{x})$

[3] G. CHILOV, *Memo bac, nouveaux programmes 83/84, Math D*, tome 2, Bordas, Nancy, 1983, pp. 13-19.
[4] G. CHILOV, *op. cit.*, p. 22.
[5] Idem, p. 25.

Ici, deux cas sont envisagés, selon que $n \in \mathbb{N}$ est un nombre premier d'une part, ou n est non premier d'autre part.

1er Cas : (Z_5, +, x) ;

Avec n= 5 un nombre premier (un nombre divisible par 1 et par lui-même).

a) Considérons a, a', b et b' des éléments de l'ensemble Z des entiers tels que :

$$\begin{cases} a - a' \in 5Z & (1) \\ b - b' \in 5Z & (2) \end{cases}$$

En additionnant (1) et (2), on a :

$$(a + b) - (a' + b') \in 5Z$$

D'où, d'après la définition de la relation R, (Cfr II.1.a.) ;

$$(a + b)\ R\ (a' + b')$$

Par suite ; $(a, a', \ldots \in \dot{a})$ et $(b, b', \ldots \in \dot{b})$. On a les sommes :

$$a + a', b + b', \ldots \in a \dot{+} b$$

Considérons cette classe d'équivalence comme étant la somme de deux classes.

Ainsi donc, la somme de deux classes d'équivalence $\dot{x}$ et $\dot{y}$ sera notée :

$$\dot{x} + \dot{y} = \dot{\overbrace{x + y}}\ ; \qquad (\dot{x}, \dot{y} \in Z_n)\ ;$$

Dans Z_5; en nous servant de la table de Pythagore ci-contre, on obtient :

+	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$
$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$
$\dot{1}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{0}$
$\dot{2}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$
$\dot{3}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$
$\dot{4}$	$\dot{4}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$

- $\dot{2}+\dot{3} = \dot{0}+\dot{0} = \dot{1}+\dot{4} = \dot{3}+\dot{2} = \dot{0}$
- $(\dot{4}+\dot{3}) + \dot{4} = \dot{4} + (\dot{3} + \dot{4}) = \dot{1}$
- $\dot{4}+\dot{3} = \dot{3} + \dot{4} = \dot{2}$

Ces quelques exemples nous conduisent à conclure que :

- L'addition est associative, commutative et admet un élément neutre unique$\dot{0}$.
- Chaque classe d'équivalence admet un symétrique.

Par exemple : le symétrique de $\dot{2}$ et $\dot{3}$; car : $\dot{2} + \dot{3} = \dot{0}$.

Donc, $(Z_5, \dot{+})$ est une ***groupe commutatif***.

b) Considérons a, a', b et b' des éléments de l'ensemble Z des entiers tels que :

$$\begin{cases} a - a' \in 5Z \\ b - b' \in 5Z \end{cases}$$

Les éléments a et b peuvent aussi s'écrire :

$$\begin{cases} a = a' + 5n \\ b = b' + 5m \end{cases} ; \ (m, n \in Z)$$

Multiplions membre à membre les deux égalités. On a :

$$a.b = a'.b' + 5.(ma' + nb' + 5nm)$$

La somme $k = ma' + nb' + 5mn$ étant un élément de Z, on a :

$$a . b - a'.b' = 5k$$

D'où ;

$$a.b - a'.b' \in 5Z$$

A cet effet, le produit de classes d'équivalence sera noté :

$$(\forall \dot{x}, \dot{y} \in Z_n) ; \ \dot{x} \, x \, \dot{y} = \dot{\overline{x \, x \, y}}$$

Dans Z_5, (avec n=5 un nombre premier), en nous servant de la table de Pythagore ci- dessous ; on obtient :

x	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$
$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$
$\dot{1}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$
$\dot{2}$	$\dot{0}$	$\dot{2}$	$\dot{4}$	$\dot{1}$	$\dot{3}$
$\dot{3}$	$\dot{0}$	$\dot{3}$	$\dot{1}$	$\dot{4}$	$\dot{2}$
$\dot{4}$	$\dot{0}$	$\dot{4}$	$\dot{3}$	$\dot{2}$	$\dot{1}$

- $\dot{2} \, x \, \dot{4} = \dot{4} \, x \, \dot{2} = \dot{3}$
- $(\dot{2} \, x \, \dot{4}) \, x \, \dot{3} = \dot{4}$
- $\dot{2} \, x (\dot{4} \, x \, \dot{3}) = \dot{4}$
- $\dot{1} \, x \, \dot{1} = \dot{2} \, x \, \dot{3} = \dot{3} \, x \, \dot{2} = \dot{4} \, x \, \dot{4} = \dot{1}$

Aussi, ces exemples nous conduit aux propriétés suivantes :

- La multiplication est associative, commutative et admet un élément neutre $\dot{1}$.
- Chaque classe non nulle admet un symétrique (ou un inverse).

Par exemple, l'inverse de $\dot{3}$ est $\dot{2}$, car : $\dot{3}\ x\ \dot{2} = \dot{1}$

Donc, (Z_5, x) est une *groupe commutatif*.

c) Autres propriétés

$\forall x, y, z \in \mathbb{Z}^3$

- Dans Z, on sait que : x. (y + z) = x.y + x.z
- De même dans Z_5; $\dot{x}\ x\ (\dot{y}\ x\ \dot{z}) = (\dot{x}\ x\ \dot{y}) \dot{+} (\dot{x}\ x\ \dot{z})$

Ce qui nous conduit à la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition dans

Z_5. Ainsi donc, de toutes les propriétés définies, on conclut que :

$(Z_n, +,)$ a la structure d'un *anneau quotient commutatif unitaire*[6]**.**

2ème Cas : $(Z_6, +, x)$;

Avec n= 6 non premier, les tables de Pythagore de Z_6 pour les deux lois sont définies comme suit :

+	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$
$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$
$\dot{1}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$	$\dot{0}$
$\dot{2}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$
$\dot{3}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$
$\dot{4}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$
$\dot{5}$	$\dot{5}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$

x	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$
$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$
$\dot{1}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$
$\dot{2}$	$\dot{0}$	$\dot{2}$	$\dot{4}$	$\dot{0}$	$\dot{2}$	$\dot{4}$
$\dot{3}$	$\dot{0}$	$\dot{3}$	$\dot{0}$	$\dot{3}$	$\dot{0}$	$\dot{3}$
$\dot{4}$	$\dot{0}$	$\dot{4}$	$\dot{2}$	$\dot{0}$	$\dot{4}$	$\dot{2}$
$\dot{5}$	$\dot{0}$	$\dot{5}$	$\dot{4}$	$\dot{3}$	$\dot{2}$	$\dot{1}$

- Pour $(Z_6, +)$, les propriétés sont analogues à $(Z_5, +)$
- Pour (Z_6, x), il existe des particularités telles que :

- Toute classe outre que la classe de 0 n'est pas inversible, sauf quelques-unes ; telles que : $\dot{1}$ et $\dot{5}$ sont inversibles, car :

$$\dot{1}\ x\ \dot{1} = \dot{1} \quad \text{et} \quad \dot{5}\ x\ \dot{5} = \dot{1}$$

- Aussi, il existe des classes non nulles dont leur produit est $\dot{0}$. Elles sont appelées : « *diviseurs de zéro* »,[7] car : $\dot{2}\ x\ \dot{3} = \dot{0}$ et $\dot{3}\ x\ \dot{4} = \dot{0}$

[6] MADIASSA MAGUIRAGA, *Mathématiques – Analyse,* CITA, Kinshasa, 2018, pp.40-41.
[7] Idem, p.41.

Autrement dit : $(\forall \dot{a} \neq \dot{0}$ et $\dot{b} \neq \dot{0})$; $\dot{a} \times \dot{b} = \dot{0}$

En résumé :

- Si n ∈ N* tel que n est un nombre premier,

  alors l'anneau quotient $(\mathbf{Z_n}, \dot{+}, \times)$ est un *anneau intègre* ; c'est-à-dire : sans diviseurs de zéro[8].

Exemples : $(Z_2, +, \times)$; $(Z_3, +, \times)$; $(Z_5, +, \times)$; $(Z_7, +, \times)$, … sont des anneaux intègres.

- Si n ∈N* tel que n est non premier, alors l'anneau quotient $(\mathbf{Z_n}, +, \times)$ *est un anneau commutatif non intègre* ; (avec diviseurs de zéro)[9].

Exemples : $(Z_4, +, \times)$; $(Z_6, +, \times)$; $(Z_8, +, \times)$; $(Z_9, +, \times)$, … sont des anneaux non intègres, car ils possèdent tous des diviseurs de zéro. Pour l'anneau $(Z_8, +, \times)$; les diviseurs de zéro sont : $\dot{2}$ et $\dot{4}$. Et pour l'anneau $(Z_{12}, +, \times)$; les diviseurs de zéro sont : $\dot{2}$ et $\dot{6}$; $\dot{3}$ et $\dot{4}$.

- Si n ∈N* tel que n est premier et tout élément autre que $\dot{0}$ admet un inverse, alors l'anneau quotient $(\mathbf{Z_n}, +, \times)$ est un corps commutatif.

  Ceci dit que les anneaux commutatifs unitaires intègres sont des corps commutatifs[10].

III. OPÉRATIONS DANS UN ENSEMBLE QUOTIENT Z_n

Dans cette partie, l'ensemble N des entiers naturels sera la source de tous les calculs. Les différentes opérations qui y sont définies ne s'effectuent que dans un système de numération donné.

III.1. Numération

L'objet de la numération est la représentation de chaque entier naturel à l'aide d'un nombre fini de symboles appelés chiffres.

---

[8] J. DIX MIER, *Cours de mathématiques du premier cycle, première année*, Fascicule XXX, Gauthier Villars, 1979.
[9] M. CONDAMINE, *Algèbre et Géométrie*, Terminal D, Collection Renée POLLE, p.78.
[10] MADIASSA MAGUIRAGA, *op. cit.*, p.20.

A savoir, les mots « chiffres » et « nombres » ne sont pas à confondre. Un chiffre peut être considéré comme un nombre, mais pas le contraire.

Il existe plusieurs systèmes de la numération :

- le système binaire, de base 2, noté : {0, 1}
- le système octal de base8 : {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}
- le système décimal de base 10 : {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}
- le système duodécimal de base 12 :{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, α, β, γ}
- Outres ces systèmes, il y a aussi les systèmes de bases : 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 11.

Propriétés

Pour un entier naturel quelconque, il est toujours possible de passer d'un système à l'autre. Les différents passages se résument en 3 catégories à savoir :

❖ *Passage d'un système décimal à un système quelconque.*

Soit à écrire le naturel a= 1243 du système décimal au système binaire. Ici, on trouve les divisions euclidiennes successives par 2 (deux)[11].

La démarche étant la suivante :

1243	2									
-1242	621	2								
1	- 620	310	2							
	1	- 310	155	2						
		0	- 154	77	2					
			1	- 76	38	2				
				1	- 38	19	2			
					0	-18	9	2		
						1	- 8	4	2	
							1	- 4	2	2
								0	- 2	1
					←				0	

Le chiffre « *réponse* » est obtenu en rassemblant tous les restes des divisions de la droite vers la gauche ; c'est-à-dire : 10011011011.

[11] Ch. PISCOT et M. ZAMANSKY, *Mathématiques générales ; éléments d'Algèbre et d'analyse,* Tome 1, Dunod, Paris, 1972, p.43.

D'où ;

$\overline{1243}^{10} = \overline{10011011011}^{2}$

Ou ;

$(1243)_{(10)} = (100110011011)_{(2)}$

❖ *Passage d'un système quelconque au système décimal*

$(\forall a, b \in N)$; $(a \neq 0$ et $b > 2)$; $(\exists \alpha_0, \alpha_1, \alpha_3, \ldots, \alpha_n \neq 0)$ uniques, tels que :
$a = \alpha_n b^n + \alpha_{n-1} b^{n-1} + \alpha_{n-2} b^{n-2} + \ldots + \alpha_2 b^2 + \alpha_1 b + \alpha_0$

On a:

$(\alpha_n, \alpha_{n-1}, \alpha_{n-2}, \ldots + \alpha_2, \alpha_1)_{(b)} = (\,?\,)_{(10)}$

Exemple : $(5023)_{(6)} = (\,?\,)_{(10)}$

En application de la formule ; on a:

$$5\,(6^3) + 0\,(6^2) + 2\,(6^1) + 3\,(6^0) = 1095$$

D'où : $(5023)_{(6)} = (1095)_{(10)}$

❖ *Passage d'un système quelconque à un système quelconque*

Ici, l'opération consiste à passer du système quelconque au système décimal et en suite de décimal au système quelconque[12].

Quelconque $\rightarrow$ décimal $\rightarrow$ quelconque

Exemple : $(253)_{(6)} = (\;?\;)_{(9)}$

On trouve : $(253)_{(6)} = (105)_{(10)} = (126)_{(9)}$

III.2. Opérations

III.2.1. Addition dans un système donné n

Considérons n = 5. Les chiffres du système sont 0, 1, 2, 3 et 4, et la table de

Pythagore de l'addition en base 5 est :

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	$\overline{10}$
2	2	3	4	$\overline{10}$	$\overline{11}$
3	3	4	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$
4	4	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$

[12] J.L. OV ; *Notions fondamentales d'Algèbre et d'analys*

En nous servant de cette table, calculons en base 5 : S = $\overline{423} + \overline{3424} + \overline{334}$

Technique de calcul

- La première colonne donne :

  3 + 4 + 4 = $\overline{21}$

- On écrit 1 et on retient 2. D'une manière analogue, la deuxième colonne donne :

  2 + 2 + 3 + 2 (de retenu) = $\overline{14}$

  On écrit 4 et on retient 1.

- Ensuite, la troisième colonne donne :

  4 + 4 + 3 + 1 (de retenu) = $\overline{22}$

  On écrit 2 et on retient 2.

- Enfin,

  3 + 2 (de retenu) = $\overline{10}$

  On écrit 10.

  D'où; S = $\overline{423} + \overline{3424} + \overline{334} = \overline{10241}$

$\overline{423}$
$\overline{3424}$
+ $\overline{334}$
$\overline{10241}$

III .2.2. Soustraction dans un système donné n

Soit à calculer dans le système binaire : D = $\overline{1001100} - \overline{10111}$

Technique de calcul

- 0 – 1 impossible. On emprunte 1 à 0.

  Le 1 emprunté en base 2 donne 2.

  2 – 1 = 1

$\overline{1001100}$
– $\overline{10111}$
$\overline{110101}$

On écrit 1.

- 0 – 1 impossible, on emprunte 1 à 1. Le 1 emprunté en base 2 donne 2. Or ce 0 avait déjà libéré 1. Donc, il lui reste 1.

  1 – 1 = 0

  On écrit 0.

- Le 1 a déjà libéré. Là il reste 0. Ainsi, 0 – 1 impossible. On emprunte 1 à 1.

  Le 1 emprunté en base 2 donne 2.

  2 – 1 = 1

  On écrit 0.

- Le deuxième 1 est déjà emprunté. Il est resté 0.

  0 – 0 = 0

  On écrit 0.

- 0 – 1 impossible. Emprunte 1 au dernier 1. Le 1 emprunté en base 2 donne 2.

  2 – 1 = 1

  On écrit 1.

- 0 – 1 impossible. On emprunte 1 à 1. Le 1 emprunté en base 2 donne 2. Or 1

  Etant déjà libéré, il est donc resté 1.

  On écrit 1.

- Le dernier 1 déjà emprunté représente 0.

D'où ; D = $\overline{1001100} - \overline{10111} = \overline{110101}$

Preuve : Avec la théorie de l'addition ;

$\overline{10111} + \overline{110101} = \overline{1001100}$

$$\begin{array}{r} \overline{10111} \\ + \ \overline{110101} \\ \hline \overline{1001100} \end{array}$$

III.2.3. Multiplication dans un système donné n

Considérons n= 5. La table de Pythagore de la multiplication en base 5 est :

$\dot{x}$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	$\overline{11}$	$\overline{13}$
3	0	3	$\overline{11}$	$\overline{14}$	$\overline{22}$
4	0	4	$\overline{13}$	$\overline{22}$	$\overline{31}$

En se servant de cette table. Calculons en base 5 : P = $\overline{3243}$ x $\overline{423}$

Technique de calcul

- La première opération est la multiplication. On a :

  On écrit 4 et on retient 1.

- (3 x 4) + 1 (de retenu) = $\overline{23}$.
  On écrit 3 et on retient 2.

- (3 x 2) + 2 (de retenu) = $\overline{13}$.

  On écrit 3 et on retient 1.

- (3 x 3) + 1 (de retenu) = $\overline{20}$.

  On écrit 20.

  De la même manière, on calcul pour 2 et 4.

$\overline{3243}$
x $\overline{423}$
$\overline{20334}$
$\overline{12041}$
+ $\overline{24132}$
$\overline{3104444}$

- Vient enfin la deuxième opération qui est l'addition. Ici, le mécanisme est celui défini dans **II**.2.1.

  D'où ; P = $\overline{3243}$x $\overline{423}$ = $\overline{3104444}$

IV. RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DANS UN ENSEMBLE QUOTIENT

IV.1. Première forme : $(\dot{x}+\dot{a}).(\dot{x} + \dot{b}) = \dot{c}$; (a, b, c ∈ N).

IV.1.1. Premier cas : $\dot{c} = \dot{0}$

La forme s'écrit :

$(\dot{x} + \dot{a}).(\dot{x} + \dot{b}) = \dot{0}$

- Le problème qui se pose ici est de connaître d'abord si l'ensemble quotient Zn dans lequel s'effectue la résolution est un anneau intègre ou non.

- Si l'anneau Zn est non intègre ; c'est-à-dire : admet des diviseurs de zéro, alors l'équation peut admettre des solutions :$\dot{x} + \dot{a} = \dot{0}$ ou $\dot{x} + \dot{b} = \dot{0}$[13].

  Ou ;

  $\dot{x} + \dot{a} = \dot{m}$ et $\dot{x} + \dot{b} = \dot{p}$; tel que : $\dot{m}.\dot{p} = \dot{n}$

- Par contre, si l'anneau Zn est intègre, alors l'équation n'admet pas des solutions[14].

Exemple 1 : Résoudre dans Z_6 l'équation $(\dot{x} + \dot{2}).(\dot{x} + \dot{3}) = \dot{0}$

En effet, est un anneau non intègre. Il admet des diviseurs de zéro qui sont : $\dot{2}$ et $\dot{3}$ ou $\dot{3}$ et $\dot{4}$.

Ainsi ;

$$(\dot{x} + \dot{2}).(\dot{x} + \dot{3}) = \dot{0} \Leftrightarrow \dot{x} + \dot{2} = \dot{0} \text{ ou } \dot{x} + \dot{3} = \dot{0}$$
$$\Leftrightarrow \dot{x} = \dot{4} \text{ ou } \dot{x} = \dot{3}$$

Ou ;

$$(\dot{x} + \dot{2}).(\dot{x} + \dot{3}) = \dot{0} \Leftrightarrow \dot{x} + \dot{2} = \dot{2} \text{ ou } \dot{x} + \dot{3} = \dot{3}$$
$$\Leftrightarrow \dot{x} = \dot{0}$$

D'ou ;

$$(\dot{x} + \dot{2}).(\dot{x} + \dot{3}) = \dot{0} \Leftrightarrow \dot{x} + \dot{2} = \dot{3} \text{ ou } \dot{x} + \dot{3} = \dot{4}$$
$$\Leftrightarrow \dot{x} = \dot{1}$$

Les solutions de l'équation sont : $\dot{0}, \dot{1}, \dot{3}, \dot{4}$
D'où, l'ensemble de solutions est : $S = \{\dot{0}, \dot{1}, \dot{3}, \dot{4}\}$

Exemple 2 : Résoudre dans Z_5 l'équation $(\dot{x} + \dot{2}).(\dot{x} + \dot{3}) = \dot{0}$.

En effet, on sait que Z_5 est un anneau intègre. Il n'admet pas des diviseurs de zéro. D'où, cette équation n'a pas de solutions dans Z_5.

Ainsi donc, l'ensemble de solutions est : $S = \boldsymbol{\phi}$.

IV.1.2. Deuxième cas : $\dot{c} > \dot{0}$

La forme de l'équation s'écrit : $(\dot{x} + \dot{a}).(\dot{x} + \dot{b}) = \dot{c}$, (a, b, c N*).

- Ici, les diviseurs de zéro n'ont pas d'importance. Il est seulement question de trouver deux classes d'équivalence dont le produit donne $\dot{c}$.

---

[13] J. CHEVALLET et M. MOREL, *Algèbre linéaire*, Tome 2, Armand Colin, Paris, 1974, p.134.
[14] Idem, p.135.

- Ensuite, les égaler aux deux parenthèses afin de déterminer l'(les) inconnue(s) $\dot{x}$.
- Les solutions sont donc les valeurs de x trouvées[15].

Exemple 1 : Résoudre dansZ_6 l'équation : $(\dot{x} + \dot{3}).(\dot{x} + \dot{5}) = \dot{3}$.

- En effet, dans Z_6 les classes qui peuvent avoir pour produit $\dot{3}$ sont : $\dot{3}$ et $\dot{5}$; $\dot{1}$ et $\dot{3}$; $\dot{3}$ et $\dot{3}$.
- En remplaçant les deux parenthèses par $\dot{3}$ et $\dot{5}$, car : $\dot{3}.\dot{5} = \dot{3}$
  On a : $(\dot{x} + \dot{3} = \dot{3}$ et $\dot{x} + \dot{5} = \dot{5}) \Leftrightarrow \underline{\dot{x} = \dot{0}}$
- Ensuite, remplaçons les deux parenthèses par $\dot{1}$ et $\dot{3}$, car : $\dot{1}.\dot{3} = \dot{3}$
  On a : $(\dot{x} + \dot{3} = \dot{1}$ et $\dot{x} + \dot{5} = \dot{3}) \Leftrightarrow \underline{\dot{x} = \dot{4}}$
- Enfin, remplaçons les deux parenthèses par $\dot{3}$ et $\dot{3}$, car : $\dot{3} . \dot{3} = \dot{3}$
  On a : $(\dot{x} + \dot{3} = \dot{3}$ et $\dot{x} + \dot{5} = \dot{3}) \Leftrightarrow \underline{\dot{x} = \dot{0}}$ ou $\underline{\dot{x} = \dot{4}}$
- L'équation a pour solutions : $\dot{0}$ et $\dot{4}$
  D'où, l'ensemble de solutions est : $S = \{\dot{0} , \dot{4}\}$

IV.2. Deuxième forme : $x^2 + x + \dot{c} = \dot{0}$; $(c \in N)$

- Le mécanisme à adopter pour cette équation du second degré est de retrouver $x^2 + x$ au début du développement d'un carré parfait, sachant que : $(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$
- Le coefficient 1 de x de l'équation à résoudre doit être décomposé de façon à obtenir un carré parfait[16].
- Ensuite, le carré parfait obtenu entraine l'équation à la forme $(\dot{x}+\dot{a}).(\dot{x} +\dot{b}) = \dot{0}$
- La résolution de l'équation nous ramène à la théorie vue au premier cas du point II.2.

Exemple : Résoudre dans Z_{13} l'équation $x^2 + x + \dot{6} = \dot{0}$.

En effet, n =13 est un nombre premier. Ce qui nous conduit à confirmer que $(Z_{13}, \dot{+}, \dot{x})$ est un corps commutatif unitaire sans diviseurs de zéro.

---

[15] M. CONDAMINE, *op. cit.*, pp.135-138.
[16] L. BADETTY et cie, *Maîtriser les maths 5*, Édition Loyola, Kinshasa 2001, p.104.

Retrouvons dans $x^2 + 1$ le début du développement d'un carré parfait.
Dans Z_{13}, le coefficient 1 de x peut s'écrire : $\dot{2} \times \dot{7}$.
D'où ;

$$\begin{aligned} x^2 + x + \dot{6} = \dot{0} &\Leftrightarrow x^2 + (\dot{2}.\dot{7})\,x + \dot{6} = \dot{0} \\ &\Leftrightarrow (x + \dot{7})^2 - \dot{7}^2 + \dot{6} = \dot{0} \\ &\Leftrightarrow (x + \dot{7})^2 - \dot{1}\dot{0} + \dot{6} = \dot{0} \; ; \qquad (\dot{7}^2 = \dot{4}\dot{9} = \dot{1}\dot{0}, \text{ dans } Z_{13}) \\ &\Leftrightarrow (x + \dot{7})^2 - \dot{2}^2 = \dot{0} \\ &\Leftrightarrow (x + \dot{7} + \dot{2}).(x + \dot{7} - \dot{2}) = \dot{0} \\ &\Leftrightarrow (x + \dot{9}).(x + \dot{5}) = \dot{0} \\ &\Leftrightarrow x + \dot{9} = \dot{0} \quad \text{ou} \quad x + \dot{5} = \dot{0} \\ &\Leftrightarrow \underline{x = \dot{4}} \quad \text{ou} \quad \underline{x = \dot{8}} \end{aligned}$$

Les solutions de l'équation sont donc $\dot{4}$ ou $\dot{8}$.

D'où, l'ensemble de solutions est : $S = \{\dot{4}, \dot{8}\}$

IV.3. Troisième forme :

Système de deux équations linéaires du premier degré à deux inconnues.

Soit :

$$\begin{cases} \dot{a}x + \dot{b}y = \dot{c} \\ \dot{a}'x + \dot{b}'y = \dot{c}' \end{cases}$$

Pour cette forme, il nous sera question d'étudier la résolution des systèmes d'équations dans un anneau Zn intègre ou non intègre.

Cependant, il est conseillé d'opter pour la méthode d'addition[17].

IV.3.1. Premier cas : Résolution dans un anneau intègre

- Résolvons dans Z_5 le système linéaire :

$$\begin{cases} \dot{4}x + y = \dot{1} & (1) \\ \dot{3}x + \dot{4}y = \dot{2} & (2) \end{cases}$$

- En effet, par la méthode d'addition, éliminons y en multipliant (1) par $\dot{1}$ et (2) par $\dot{1}$ et additionnons membre à membre les équations du système trouvé. On a :

[17] M. CONDAMINE, *op. cit.*, pp.141-148.

$$\begin{cases} \dot{4}x + \dot{1}y = \dot{1}\dot{1} \\ \dot{3}x + \dot{4}y = \dot{2}\dot{1} \end{cases} \Rightarrow \dot{4}x + \dot{3}x = \dot{1} + \dot{2}$$

$$\Rightarrow \dot{2}x = \dot{3} \qquad (3)$$

- Dans (3), $\dot{2}$ est inversible et a pour inverse $\dot{3}$, c'est-à-dire ; $\dot{2} \times \dot{3} = \dot{1}$.
- D'où ; $\underline{x = \dot{4}}$
- Ensuite, éliminons x en multipliant (1) par $\dot{3}$ et (2) par $\dot{1}$. On a :

$$\begin{cases} \dot{4}x + \dot{1}y = \dot{1}\dot{3} \\ \dot{3}x + \dot{4}y = \dot{2}\dot{1} \end{cases} \Rightarrow \dot{3}x + \dot{4}x = \dot{3} + \dot{2}$$

$$\Rightarrow \dot{2}y = \dot{0} \qquad (4)$$

Aussi dans (4), $\dot{2}$ est inversible.

D'où ; $\underline{y = \dot{0}}$

- Le système a pour solution le couple $(x, y) = (\dot{4}, \dot{0})$ et l'ensemble de solutions est : $S = \{(\dot{4}, \dot{0})\}$

Remarque :

Le couple $(\dot{4}, \dot{0})$ est solution du système car, en remplaçant $x = \dot{4}$ et $y = \dot{0}$. Dans le système, on a : $(\dot{4} \times \dot{4}) + \dot{0} = \dot{1}$ et $(\dot{3} \times \dot{4}) + \dot{0} = \dot{2}$

Le déterminant du système est : $D = 16 - 3 = 13 \Rightarrow D = \dot{3} \neq \dot{0}$

IV.3.2. Deuxième cas : Résolution dans un anneau non intègre

Exemple 1 : Résolvons dans Z_6 le système linéaire ;

$$\begin{cases} \dot{4}x + y = \dot{1} & (1) \\ \dot{3}x + \dot{4}y = \dot{2} & (2) \end{cases}$$

- Par la méthode d'addition, éliminons x en multipliant (1) par $\dot{2}$ et (2) par $\dot{1}$. On a :

$$\begin{cases} \dot{4}x + y = \dot{1}\dot{2} \\ \dot{3}x + \dot{4}y = \dot{2}\dot{1} \end{cases} \Rightarrow \dot{0}x + \dot{0}y = \dot{5}$$

- Le résultat obtenu traduit que le système est impossible. D'où, le système n'admet pas de solution. L'ensemble de solution est donc : $S = \boldsymbol{\phi}$

Remarque : Le déterminant du système est : $D = \dot{2} - \dot{2} = \dot{0}$

Exemple 2 : Résolvons dans Z_6 le système linéaire

$$\begin{cases} x + \dot{5}y = \dot{3} & (1) \\ \dot{2}x + y = \dot{3} & (2) \end{cases}$$

- En effet, par la méthode de l'addition, éliminons y en multipliant (1) par $\dot{1}$ et (2) par $\dot{1}$. On a :

$$\begin{cases} x + \dot{5}y = \dot{3}\dot{1} \\ \dot{2}x + y = \dot{3}\dot{1} \end{cases} \Rightarrow x + \dot{2}x = \dot{3} + \dot{3}$$

$$\Rightarrow \dot{3}x = \dot{0}$$

$$\Rightarrow \underline{x = \dot{0}} \text{ ou } \underline{x = \dot{2}} \text{ ou } \underline{x = \dot{4}}$$

- Ensuite, éliminons x en multipliant (1) par $\dot{4}$ et (2) par $\dot{1}$. On a :

$$\begin{cases} x + \dot{5}y = \dot{3}\dot{4} \\ \dot{2}x + y = \dot{3}\dot{1} \end{cases} \Rightarrow \dot{2}y + \dot{2}y = \dot{0} + \dot{3}$$

$$\Rightarrow \dot{3}y = \dot{3}$$

$$\Rightarrow \underline{y = \dot{1}} \text{ ou } \underline{y = \dot{3}} \text{ ou } \underline{y = \dot{5}}$$

- Pour déterminer les solutions du système, il est conseillé d'associer la valeur de x dans une des équations afin d'obtenir la vraie valeur de y.
  - pour $x = \dot{0}$, on a : $y = \dot{3}$
  - pour $x = \dot{2}$, on a : $y = \dot{5}$
  - pour $x = \dot{4}$, on a : $y = \dot{1}$
- Les solutions du système sont : $(\dot{0}, \dot{3})$; $(\dot{2}, \dot{5})$ et $(\dot{4}, \dot{1})$.

  D'où, l'ensemble de solutions est : $S = \{(\dot{0}, \dot{3}), (\dot{2}, \dot{5}), (\dot{4}, \dot{1})\}$

Remarque : Le déterminant du système est : $D = \dot{1} - \dot{4} = \dot{3} \neq \dot{0}$

$\dot{3}$ étant diviseur de zéro.

Exemple 3 : Résolvons dans Z_6 le système linéaire :

$$\begin{cases} \dot{2}x + \dot{3}y = \dot{1} & (1) \\ x + \dot{4}y = \dot{4} & (2) \end{cases}$$

- En effet, par la méthode de l'addition, éliminons y en multipliant (1) par $\dot{2}$ et (2) par $\dot{3}$. On a :

$$\begin{cases} \dot{2}x + \dot{3}y = \dot{1}\dot{2} \\ x + \dot{4}y = \dot{4}\dot{3} \end{cases} \Rightarrow \dot{4}x + \dot{3}x = \dot{2} + \dot{0}$$

$$\Rightarrow \underline{x = \dot{2}}$$

- Ensuite, éliminons x en multipliant (1) par $\dot{1}$ et (2) par $\dot{4}$. On a :

$$\begin{cases} \dot{2}x + \dot{3}y = \dot{1}\dot{1} \\ x + \dot{4}y = \dot{4}\dot{4} \end{cases} \Rightarrow \dot{3}y + \dot{4}y = \dot{1} + \dot{4}$$

$$\Rightarrow \underline{y = \dot{5}}$$

- Les solutions du système sont : $(\dot{2}, \dot{5})$.

  D'où, l'ensemble de solutions est : $S = \{ (\dot{2}, \dot{5})\}$

  Remarque : Le déterminant du système est : $D = \dot{2} - \dot{3} = -\dot{1} \neq \dot{0}$

CONCLUSION

Avec la théorie des structures algébriques, nous avons d'abord eu l'avantage de démontrer que $(Z_n, \dot{+}, \dot{x})$ est un anneau commutatif unitaire intègre ou non intègre, selon que $n \in N^*$ est premier ou non premier.

Ainsi, les opérations telles que définies dans les ensembles N, Z, D, Q, R et C respectivement ensembles des naturels, des entiers, des décimaux, des rationnels, des réels et des nombres complexes sont d'une aisance technique considérable pour la compréhension et l'exécution. Ces opérations définies autrement sont effectuées dans un ensemble quotient Z_n que nous venons de définir en extension.

Et donc, conformément à notre objectif, nous avons présenté des techniques ou des méthodes beaucoup plus pratiques qui facilitent les opérations et la résolution des équations et systèmes d'équations linéaires dans un ensemble quotient Z_n.

BIBLIOGRAPHIE

1. BADETTY, L. et cie, *Maîtriser les maths 5*, édition Loyola, Kinshasa, 2001, 558 pages.
2. CHEVALLET, J. et MOREL, M., *Algèbre linéaire*, Tome 2, Armand Colin, Paris, 1974.
3. CHILOV, G., *Memo bac, nouveaux programmes 83/84, Math D*, tome 2, Bordas, Nancy, 1983.
4. CONDAMINE, M., *Algèbre et Géométrie*, Terminal D, Collection Renée POLLE, 159 pages.
5. CREM, *Mathématique : Algèbre / Analyse 6è*, ECA, Kinshasa, 480 pages.
6. DIX MIER, J., *Cours de mathématiques du premier cycle,* première année, Fascicule XXX, Gauthier- Villars, 1979.
7. MADIASSA MAGUIRAGA, *Mathématiques – Analyse* : Centre International pour les Technologies Avancées (CITA), Université de Kinshasa, 2018, 256 pages.
8. OVAERT, J.L. et CHAMBADAL, L., *Cours de mathématique : Notions fondamentales d'Algèbre et d'analyse*, Tome 1, Gauthier Villars, Paris, 1966, 704 pages.

9. PISCOT, Ch. et ZAMANSKY, M., *Introduction à l'algèbre et l'analyse moderne*, 3e édition, Dunod, Paris, 1967, 435 pages.
10. PISCOT, Ch. et ZAMASNSKY, M., *Mathématiques générales ; éléments d'Algèbre et d'analyse*, Tome 1, Dunod, Paris, 1972, 182 pages.
11. QUEYSANNE, M., *Algèbre MP & spéciales AA'*, Armand Colin, Paris, 1971.
12. SEYMOUR LIPSCHUTZ, Ph. D., *Theory and problems of Linear Algebra*, Schaum's Outline series, 1968.