CAHIERS AFRICAINS DES DROITS DE L'HOMME ET DE LA DÉMOCRATIE
AINSI QUE DU DÉVELOPPEMENT DURABLE
REVUE AFRICAINE INTERDISCIPLINAIRE

ISSN : 2791-1063 (Imprimé)
ISSN : 2791-1071 (En ligne)

25ème année - Numéro 71 - Volume 1 - Avril-Juin 2021

CARACTÉRISATION DES EXTRÊMALES D'UN PROBLÈME VARIATIONNEL : APPROCHE PAR LA SOLUTION D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

Par

Elie VUBU KULUNGU
Assistant à l'Institut Supérieur de Techniques Appliquées de Lukula à Boma

et

Mitterrand TSUMBU NGOMA
Assistant à l'Institut Supérieur Pédagogique de Seke Banza/Kongo Central

SUMMARY

The extremal curve or geodesics minimize the distance between two points of a surface. The are the solution of a differential equation called "equation of Lagrange". If $\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial \dot{x}} \leq 0$ *and* $\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial \dot{x}} \geq 0$, *we have respectively the maximum and minimum curve. The are used in mechanics of Langrage and in variational geometry.*

I. INTRODUCTION

Dans la théorie du calcul des variations, le problème fondamental consiste à calculer les valeurs optimales (maximales et minimales) des fonctionnelles des courbes exprimées par des intégrales définies.

Ce problème est analogue à celui de la détermination des extrémums d'une fonction en calcul différentiel.

En effet, la courbe x = x(t) donnant l'extrémum d'une fonctionnelle K(x) doit vérifier une certaine équation différentielle. Il s'agit exactement de savoir que la condition nécessaire pour qu'une fonction de plusieurs variables atteigne son extrémum en un point est que sa différentielle totale du premier ordre s'annule en ce point. Cette condition étant respectée, la condition suffisante en est que la forme quadratique $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\, dxdy$ soit positive en ce point. Qu'en est-il de la fonctionnelle $K = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x, \dot{x})dt$?

La condition suffisante du minimum serait $\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial \dot{x}} \geq 0$ et celle du maximum serait $\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial \dot{x}} \geq 0$. Ce sont des conditions de Legendre. Etablissons-les.

Or, la fonctionnelle $K = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x, \dot{x})dt$ = x(t) est la solution de l'équation $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$, appelée équation d'Euler-Lagrange.

x(t) est donc la courbe extrémale ou la géodésique, c'est-à-dire l'ensemble de courbes sur la surface qui réalisent le minimum de la distance entre deux points donnés d'une surface.

Aussi, il s'agira d'abord de définir successivement les concepts des courbes dans un espace euclidien E^3, d'exprimer cette métrique et enfin d'établir l'équation de la géodésique ou la courbe minimale fondamentale. Ensuite, il s'agira d'établir l'équation de Lagrange. De cette équation, on définira la première et la seconde variation de la fonctionnelle $K = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x, \dot{x})dt$.

C'est de la variation seconde que sera déduite la condition de Legendre, très déterminante dans la détermination des courbes extrémales.

II. COURBES DANS UN ESPACE AFFINE EUCLIDIEN[3]

II.1. Définitions

Soit $A_3 = K^3$ l'espace affine euclidien associé à l'espace vectoriel réel K^3.

- On appelle fonction de classe C^k ($k \geq 0$), toute fonction qui admet des dérivées partielles jusqu'à l'ordre k, toutes ces dérivées étant continues[1].
- Un paramétrage de classe C^kde A_3est la donnée de n'importe quel doublet (I, f) tel que :

  (i) f soit une fonction de classe C^k de I vers A_3.

  (ii) f soit une injection, c'est-à-dire, l'arc paramétré (I, f) soit un arc de Jordon en ce sens que chacun de ses points soit simple.

  (iii) $f'(t) \neq 0$, $\forall t \in I$. On dit que l'arc paramétré (I, f) est régulier.
- Tout arc géométrique dans A_3 ou la courbe est toute classe d'équivalence Cl (I,f).

[1] TAWABA MUSIAN, *Géométrie différentielle,* L1 Math, UPN, 2005 ; Support de Géométrie, p.87.

Il est représenté paramétriquement par $f(t)= (x(t), y(t), z(t))$.[2]

II.2. Métrique sur une surface dans E^3

Une surface paramétrée de classe C^k $(k \geq 1)$ est la donnée d'un couple (U, r) où U est un ouvert connexe R^2 et r, une application de $U \subset R^2$ dans E^3 vérifiant les conditions suivantes :

(i) $r : U \subset R^2 \longrightarrow E^3$

$(u, v) \longrightarrow r(u, v)$

(ii) $r_u \wedge r_v \neq 0$ avec $r_u = \frac{\partial r}{\partial u}$ et $\frac{\partial r}{\partial v}$

(iii) r est injective.[3]

Soit la courbe $(c) = r(u(t), v(t))$ tracée sur $\sum \equiv (U, r)$.

$$ds = \| r'(t) \| (dt).$$

D'où :

$$ds^2 = \| r'(t) \|^2 (dt)^2$$
$$= < dr, dr >$$

Or

$$dr = < r_u du + r_v dv, \; r_u du + r_v dv, >$$
$$= < r_u , r_u > du^2 + 2 < r_u , r_v > dudv + < r_v , r_v > dv^2$$

Posons

$E = < r_u , r_u > = \| r_u \|^2$
$F = < r_u, r_v >$
$G = < r_v, r_v > = \| r_v \|^2$

Ainsi,

$E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2$
$F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v$
$G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2$

[2] F. TEMO BEKO de LOSO, "The Hamilton-formalism in calculs of variations: the second variation", in *Annales de la Faculté des Sciences*, PUK, numéro spécial 3, 1997, p. 8.
[3] J. GRIFONE, M. MEHDI, "On the geometry of Lagrangien mechanics with non-holonomie constraints", *Journal of Geometry and physics* 30, 1999, pp. 187-203.

Donc

$ds^2 = E\, du^2 + 2F du dv + G\, dv^2$

E, F et G s'appellent ***fonctions de GAUSS***.

Posons en suite :

$u = x^1$
$v = x^2$
$r_1 = r_u$
$r_2 = r_v$
$g_{11} = < r_1, r_1 >$
$g_{12} = < r_1, r_2 >$
$g_{21} = < r_2, r_1 >$
$g_{22} = < r_2, r_2 >$

Tenons que $g_{12} = g_{21}$ (identité de Schwartz).

On écrira ainsi : $ds^2 = g_{11}\,(dx^1) + 2g_{12}dx^1dx^1 + g_{22}\,(dx^2)^2$

II.3. Symboles de Christoffel

Soit $r(t) = (x^1(t), y^2(t))$ une courbe située sur une surface (S).

- La première forme fondamentale de (S) est notée par $1(dx^1, dx^2) = g_{ij}\, dx^i, dx^j$ où $g_{ij} = < r_i, r_j >$ avec $r_i = \frac{\partial r}{\partial x^i}$ et $r_j = \frac{\partial r}{\partial x^j}$
- La seconde forme fondamentale de (S) est notée $2\,(dx^1, dx^2) = b_{ij}dx^idx^j$ où $b_{ij} = < r_{ij}\, , n >$ avec $r_i = \frac{\partial^2 r}{\partial x^i \partial x^j}$ et $n = \frac{r_1 \wedge r_2}{\| r_1 \wedge r_2 \|}$
- Les fonctions $|ij, k\,| = |ji, k\,| = < \frac{\partial^2 r}{\partial x^i \partial x^j}, \frac{\partial r}{\partial x^k} >$ s'appellent ***symbole de Christoffel de première espèce.***[4]

Le calcul de la fonction |ij, k | se ramène à la formule

$$\Gamma_{ij}^k = |ij, k\,| = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)$$

Où : i, j, k = 1, 2

[4] F. FARAH, *Études des courbes extrêmales et optimales d'un Lagrangien régulier sur une distribution,* Thèse, Université de Savoie (2009), pp. 45 à 50.

Donnons quelques exemples à ce propos :

$$\Gamma_{11}^{1} = |11, 1| = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Eu}$$

$$\Gamma_{12}^{1} = |12, 1| = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{21}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial x^1}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Ev}$$

$$\Gamma_{22}^{1} = |22, 1| = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{21}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{21}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}\right) = \frac{1}{2}.2\mathrm{F_v} - \frac{1}{2}\mathrm{G_u} = \mathrm{F_v} - \frac{1}{2}\mathrm{G_u}$$

Les fonctions notées $\left|{}_{i}\;{}^{k}\;{}_{j}\right|$ s'appellent ***symboles de Christoffel*** de ***deuxième espèce*** ou coefficients de connexion de deuxième espèce avec

$\left|{}_{j}\;{}^{k}\;{}_{i}\right| = \left|{}_{i}\;{}^{k}\;{}_{j}\right| = g^{ks}|ij , s|$ et I, j, k =1, 2 où $\Gamma_{ij}^{k} = \Gamma_{ji}^{k}$

On notera que $g^{ij} = (-1)^{i+j} . \frac{g_{ij}}{|g|}$

Aussi, $\left|{}_{1}\;{}^{1}\;{}_{1}\right| = g^{11}|11 , 1| + g^{12}|11 , 2|$

Or,

- $g^{11} = \frac{g_{11}}{|g|} = \frac{g_{11}}{\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{vmatrix}} = \frac{g_{11}}{g_{11}g_{11} - (g_{12})^2}$
  $= \frac{g_{11}}{EG - F^2}$
  $= \frac{E}{EG - F^2}$
- $|12, 1| = \frac{1}{2}\mathrm{E_v}$
- $g^{12} = -\frac{g_{12}}{|g|} = -\frac{g_{11}}{EG - F^2}$
  $= \frac{-F}{EG - F^2}$
- $|11, 2| = \mathrm{F_u} - \frac{1}{2}\mathrm{E_v}$

Donc

$$\left|{}_{1}\;{}^{1}\;{}_{1}\right| = \frac{\frac{1}{2}EE_u - F\left(F_u - \frac{1}{2}E_v\right)}{EG - F^2}$$

En plus

- $\left|{}_{2}\;{}^{2}\;{}_{2}\right| = g^{21}|22 , 1| + g^{22}|22 , 2|$
  $= \frac{-F\left(F_v - \frac{1}{2}E_u\right) + \frac{1}{2}GG_u}{EG - F^2}$
- $\left|{}_{1}\;{}^{2}\;{}_{2}\right| = \left|{}_{2}\;{}^{2}\;{}_{1}\right| = g^{21}|12 , 1| + g^{22}|12 , 2|$
  $= \frac{-\frac{1}{2}FE_v + \frac{1}{2}GG_u}{EG - F^2}$

II.4. Les géodésiques

Soit une V_n variété différentiable et M un point mobile fonction du paramètre t, x = x(t) l'arc de courbe décrit par le point M.

Le vecteur vitesse v de M admet pour composantes contravariantes :

$$v^i = \frac{dx^i}{dt} \qquad \text{(i)}$$

Le vecteur-accélération du point M sera :

$$\gamma^i = \nabla v^i = dv^i + \left| \begin{matrix} & i & \\ h & & k \end{matrix} \right| \frac{dx^h}{dt} \cdot \frac{dx^k}{dt} \qquad \text{(ii)}$$

(i) et (ii) donnent ;

$$\gamma^i = \frac{d^2x^i}{dt^2} + \left| \begin{matrix} & i & \\ h & & k \end{matrix} \right| \frac{dx^h}{dt} \cdot \frac{dx^k}{dt} \quad ; \quad \text{où } i, h, k = 1{,}2 \qquad \text{(iii)}$$

Si $\gamma^i = 0$, alors :

$$\gamma^i = \frac{d^2x^i}{dt^2} + \left| \begin{matrix} & i & \\ h & & k \end{matrix} \right| \frac{dx^h}{dt} \cdot \frac{dx^k}{dt} = 0$$

est une géodésique. C'est une équation différentielle du second ordre.[5]

III. EQUATION SIMPLE DE LAGRANGE

Soit la fonctionnelle $K(x)= \int_{t_0}^{t_1} L(t,x,\dot{x})dt$

Construisons la fonction $k(x + \varepsilon h)$,

On a :

$$k(x + \varepsilon h) = \int_{t_0}^{t_1} L\,(t, x + \varepsilon h, \dot{x} + \varepsilon h)dt.$$

Ainsi,

$$K'(0) = \frac{d}{d\varepsilon} k\,(x + \varepsilon h) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{k(x+\varepsilon h) - k(x)}{\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\int_{t_0}^{t_1} L(t,xh,\dot{x} + \varepsilon \dot{h})dt - \int_{t_0}^{t_1} L(t,x,\dot{x})dt}{\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\int_{t_0}^{t_1} [L(t,x,+\varepsilon h,\dot{x} + \varepsilon \dot{h}) - L(t,x,\dot{x})]}{\varepsilon}$$

[5] I. BUCATARU, *Metric non linear connections. Diff. Geometry and its Applications* 25 (2007), pp. 335-343.

D'après Taylor d'ordre 1

$$L\left(t,\ xh,\ \dot{x}+\varepsilon\dot{h}\right)-L(t,x,\dot{x})=\frac{\partial L}{\partial x}h+\frac{\partial L}{\partial\dot{\varepsilon}}\varepsilon\dot{h}$$

On obtient

$$K'(0) = \frac{d}{d\varepsilon}k(x+\varepsilon h) = \begin{cases} \int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{\partial L}{\partial x}h+\frac{\partial L}{\partial\dot{\varepsilon}}\varepsilon\dot{h}\right]dt \\ \varepsilon = 0 \end{cases}$$

$$= \int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial L}{\partial x}hdt+\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\dot{h}\,dt(\alpha)$$

Or

$$\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}h = \left[\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}h\right]_{t_0}^{t_1}-\int_{t_0}^{t_1}h\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}$$

En intégrant par parties, l'expression (α) devient :

$$\frac{d}{d\varepsilon}k(x+\varepsilon h) = \begin{cases} \left[\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}h\right]_{t_0}^{t_1}-\int_{t_0}^{t_1}h\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}+\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial L}{\partial x}hdt \\ \varepsilon = 0 \end{cases}$$

$$=\left[\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}h\right]_{t_0}^{t_1}+\left(\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\right)hdt$$

Le terme $\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}h$= 0, car h ($t_0$) = h ($t_1$) = 0.

D'où :

$$\frac{d}{d\varepsilon}k(x+\varepsilon h) = \begin{cases} \left(\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\right)hdt \\ \varepsilon = 0 \end{cases}$$

Si

$$\frac{d}{d\varepsilon}k(x+\varepsilon h) = 0,\text{ alors } \left(\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\right)hdt = 0$$

Ainsi,

$$\frac{\partial}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}} = 0(\beta)$$

Ou

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}-\frac{\partial L}{\partial x} = 0(\gamma)$$

(β) et (γ) s'appellent équations d'Euler-Lagrange (cas simple).[6]

[6] PIERRE PANSU, *Calcul des variations,* 12 juillet 2005, pp. 74-80.

IV. PROBLEMES VARIATIONNELS LAGRANGIENS

IV.1. Définition

Soit U un ouvert de R^n. Un lagrangien sur U est la donnée d'une fonction lisse

$L : U \times R^n \times [a, b] \rightarrow R$

Le problème variationnel associé consiste à chercher, étant donné deux points Q_1et Q_2 de U, les courbes x (t) : [a, b] → U tracées dans U, telles que x(a) = Q_1 et x(b) = Q_2 qui minimisent la fonctionnelle.

$K(x) = \int_a^b L(x(t), \dot{x}(t), t)\ dt$

IV.2. Exemple

La recherché des plus courts chemins riemanniens est le problème variationnel associé au lagrangien $L(x(t), \dot{x}(t), t) = \sqrt{g_x \dot{x}(t)}$

IV.3. Lemme

La fonctionnelle K est différentiable. Sa différentielle est donnée par la formule suivante.

Soit $s \rightarrow c_s$ une famille lisse des courbes telle que :

$c_0 = c$ et $\frac{d}{ds} c_s = \begin{cases} h \\ s = 0 \end{cases}$

Alors

$$\frac{d}{ds} k(c_s) = \begin{cases} \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial x}(x(t), \dot{x}(t), t) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x(t), \dot{x}(t), t)\right) h(t)\right] dt \\ s = 0 \end{cases}$$

Preuve

On dérive sous le signe somme

$$\frac{d}{ds} k(c_s) = \begin{cases} \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial x}(x, \dot{x}, t) h(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x, \dot{x}, t) h(t)\right] dt \\ s = 0 \end{cases}$$

Puis, on intègre par parties

$$\int_a^b \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x, \dot{x}, t)\, \dot{h} dt = \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x, \dot{x}, t) h(t)\right]_a^b - \int_a^b \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x, \dot{x}, t) h(t)\right] dt$$

IV.4. Théorème

La courbe x(t) est une extrêmale du problème variationnel associé au lagrangien L si et seulement si pour tout t∈ [a, b], la forme linéaire sur R^n est :

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x, \dot{x}, t) - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x, \dot{x}, t)\right] = 0$$

Preuve

Pour toute fonction lisse sur [a, b] à valeurs dans R^n qui s'annule aux extrémités, on construit une famille $c_s(t) = q(t) + sh(t)$ des courbes d'extrémités fixées dont h est la dérivée.

Alors

$$\frac{d}{ds} \mathrm{k}\,(x_i) = \begin{cases} \int_a^b j(t)(h(t))\,dt \\ \\ t = 0 \end{cases} \qquad \text{où} \quad \mathrm{j}\,(\mathrm{t}) = \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$$

J(t) est la forme linéaire sur R^n.

K est extrémale si et seulement si $\int_a^b j(t), h(t)dt$ pour toute fonction lisse h sur [a, b] s'annule aux extrémités.

IV.5. Lemme

Soit j une forme linéaire sur R^n dépendant différentiablement de t ∈[a, b]. On suppose que toute fonction lisse h sur [a, b] à valeurs dans R^n, nulle au voisinage des extrémités, $\int_a^b j(t), h(t)dt = 0$ alors j = 0. [7]

Preuve

Supposons par absurde qu'il existe t̂∈] a, b [tel que j($\hat{j}$) ≠ 0.

Soit H(t) = j ($\hat{t}$)^T le vecteur dual de j (t).

Soit $\mathcal{X}$ une fonction lisse, positive ou nulle à support petit voisinage t̂.

On pose h(t) = $\mathcal{X}$(t) H(t). Si le support de $\mathcal{X}$ est assez petit.

$\int_a^b j(t)h(t)\,dt = \int_a^b \mathcal{X}(t) \parallel j(t) \parallel^2 dt > 0$, contradiction.

[7] ZELDOVITCH ą MYCHKIS (A), *Éléments de Mathématiques Appliquées*, Mir, Moscou, 1974, 608 p.

IV.6. Condition de Legendre

Soit la fonctionnelle K $=\int_{t_0}^{t_1} L(t,x,\dot{x})dt$, la différentielle de la fonction K notée

$$\delta K = \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} h\right]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) h dt$$

δK s'appelle ***première variation de la fonctionnelle***.

La deuxième variation ou variation secondaire est définie par

$$\delta^2 K = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\left[\left(\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial \dot{x}}\right) h^2 + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x} \partial \dot{x}}\right) \dot{h}^2\right] dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial x} h^2 + \frac{2\partial^2 L}{\partial x \partial \dot{x}} h\dot{h} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x} \partial \dot{x}}\right) \dot{h}^2\right] dt$$

Posons

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial x} = M, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial \dot{x}} = N \quad et \quad \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x} \partial \dot{x}} = \ell$$

$$\delta^2 K = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} (Mh^2 + 2Nh\dot{h} + \ell\dot{h}^2) dt$$

Or

$$\frac{d}{dt}(h^2) = 2h\dot{h}^2$$

D'où,

$$\delta^2 K = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} \left(Mh^2 + N\frac{d}{dt}(h^2) + \ell\dot{h}^2\right) dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} (Mh^2 + \ell\dot{h}^2) dt + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} N\frac{d}{dt}(h^2) dt$$

Reposons

$$W = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} (Mh^2 + \ell\dot{h}^2) dt$$

De plus

$$\frac{d}{dt}(Nh^2) = h^2\frac{dN}{dt} + N\frac{d(h^2)}{dt}$$

Ainsi ;

$$\delta^2 K = W + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{d}{dt}(Nh^2) - h^2\frac{d}{dt}N\right) dt$$

$$= W + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{d}{dt}(Nh^2\right] dt - \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\left[h^2\frac{d}{dt}N\right] dt$$

$$= W + \frac{1}{2}[Nh]_{t_0}^{t_1} dt - \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\left[h^2\frac{d}{dt}N\right] dt$$

Or, $\frac{1}{2}[\,Nh]_{t_0}^{t_1} = 0$

$$\delta^2 K = W - \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}[\,h^2 \frac{d}{dt}N]dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} (\,Mh^2 + \ell\dot{h}^2 - h^2 \frac{d}{dt}N\,)dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} [(\,M - \frac{d}{dt}N\,)h^2 + \ell\dot{h}^2]dt$$

En posant M − $\frac{d}{dt}N = T$, on retrouve que

$$\delta^2 K = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} (Th^2 + \ell\dot{h}^2)dt$$

Elle est une forme quadratique toujours positive. $\ell = \frac{\partial^2 L}{\partial\dot{x}\partial\dot{x}}$ peut-être soit positive, soit négative. C'est ***la condition de Legendre***.

V. CONDITION DE LEGENDRE ET DÉTERMINATION DES COURBES EXTRÊMALES (GÉODÉSIQUES)

L'équation $\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}) = 0$ est un système de n équations différentielles du second ordre et la solution dépend de 2n constantes variables.

Pour les trouver, on dispose de 2n conditions $x\,(t_0) = x_0$; $x\,(t_1) = x_1$.

Une solution de ces équations s'appelle extrêmale de la fonctionnelle.

Pour qu'une extrémale soit minimum, il faut que $\ell = \frac{\partial^2 L}{\partial\dot{x}\partial\dot{x}} \geq 0$.

De même, pour qu'une extrêmale soit une courbe maximale, il faut que $\ell = \frac{\partial^2 L}{\partial\dot{x}\partial\dot{x}} \leq 0$.

Or cette courbe extrêmale est le chemin le plus court entre deux points A et B pris sur une surface (S). Elle s'appelle ainsi une ***géodésique***.

VI. Exemples

Exemple 1

Plus courts chemins riemanniens

Ici $L\ (x,\dot{x}) = \sqrt{g_q(\dot{q})}$. Ce problème variationnel étant invariant, par reparamétrisation, on peut se contenter de chercher les extrêmales paramétrées à une vitesse constante 1.

Alors

$\ell = \frac{\partial L^2}{\partial \dot{x}_i}(q, \dot{q}) = 2\sum_k \dot{x}_k\, g_{ki}(q)$

Il vient

$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(q(t).\dot{q}(t)) = [g_q(t)(\dot{q}(t)]^{-\frac{1}{2}} . [\sum_k \dot{q}_k(t).\, g_{ki}(q(\mathrm{t}))]$

Comme on a supposé que la courbe est paramétrée à vitesse constante 1,

$g_q(t).\dot{q}(t) = 1.$

Alors ;

$\frac{d}{dt}[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(t)\dot{q}(t))] = \sum_k \ddot{q}_k(t) g_{ki}(q(t)) + \sum_k \dot{q}_k(t)[\sum_k \frac{\partial g_{ki}}{\partial q_j}(\mathrm{q}(\mathrm{t}))\dot{q}_j(t)]$

D'autre part,

$\frac{\partial L^2}{\partial \mathrm{q}}(\mathrm{q}(\mathrm{t}), \dot{\mathrm{q}}(\mathrm{t}))_\mathrm{i} = \frac{\partial L^2}{\partial \mathrm{q_i}}(\mathrm{q}(\mathrm{t}), \dot{\mathrm{q}}(\mathrm{t})) = \sum_{j,k} \frac{\partial g_{jk}}{\partial q_i}[q(t), \dot{q}_j(t)\dot{q}_k(t)]$

D'où :

$\frac{\partial L}{\partial q}(\mathrm{q}(\mathrm{t}), \dot{\mathrm{q}}(\mathrm{t}))_\mathrm{i} = \frac{1}{2}\sum_{j,k} \frac{\partial g_{jk}}{\partial q_i}[q(t), \dot{q}_j(t)\dot{q}_k(t)]$

Par conséquent, les équations d'Euler-Lagrange s'écrivent :

$\sum_{\mathrm{j,k}}[\frac{1}{2}\frac{\partial g_{jk}}{\partial q_i}(q(t) - \frac{\partial g_{ki}}{\partial q_j}(q(t)\dot{q}_j(t)\dot{q}_k(t))] - \sum_k \ddot{q}_k(t) g_{ki}(g(t)) = 0$

Pour i =1, … , n et t ∈[a, b]

On appelle ***géodésiques d'une variété riemannienne*** les extrêmales du lagrangien $L^2(q, \dot{q}) = g_q(\dot{q})$ qui est le carré de la norme.

Alors les géodésiques coïncident avec les extrémales de L qui sont parcourues à une vitesse constante.

Il reste à vérifier que $L^2(q, \dot{q}) = g_q(\dot{q})$ est constant le long d'une géodésique q', c'est-à-dire le long d'une extrêmale de L^2.

Comme L^2 est homogène de degré 2 par rapport à $\dot{q}$,

$2L^2(q, \dot{q}) = \frac{\partial L^2}{\partial \dot{q}}(\mathrm{q}, \dot{q})\, \dot{q}$

En dérivant par à t, et en utilisant les équations d'Euler-Lagrange pour L^2, à savoir :

$\frac{\partial L^2}{\partial q}(q, \dot{q}) = \frac{d}{dt}(\frac{\partial L^2}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q}))$

Il devient

$$\frac{\partial}{\partial q} 2\, L^2(q,\dot{q}) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L^2}{\partial \dot{q}}(q,\dot{q})\dot{q} + \frac{\partial L^2}{\partial \dot{q}}(q,\dot{q})\ddot{q}\right)$$

$$= \frac{\partial L^2}{\partial q}(q,\dot{q})\dot{q} + \frac{\partial L^2}{\partial \dot{q}}(q,\dot{q})\ddot{q}$$

$$= \frac{d}{dt} L^2(q,\dot{q})$$

Donc,

$$\frac{d}{dt} L^2(q,\dot{q}) = 0$$

Exemple 2

Les équations d'Euler-Lagrange pour les extrémales, en particulier pour les minimums de la fonctionnelle j $=\int_0^1 \sqrt{g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}\, dt$ se confondent avec celle des géodésiques à condition que la courbe soit munie d'un paramètre naturel.[8]

Preuve

$$\frac{\partial L}{\dot{x}^i} = \frac{g_{ij}\,\dot{x}^j}{\sqrt{g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}}$$

$$\frac{\partial L}{x^k} = \frac{\partial g_{ij}/\partial x^k \dot{x}^i\dot{x}^j}{2\sqrt{g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}} = f_k$$

L'équation des extrêmales $\frac{d}{dt}P_k = f_k$ devient ;

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial g_{ij}\,\dot{x}^j}{2\sqrt{g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}}\right) = \frac{\partial g_{ij}\,\dot{x}^i\dot{x}^j}{2\sqrt{g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}}$$

$$\frac{d}{dt}(g_{ij}\dot{x}^j) = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\dot{x}^i\dot{x}^j$$

$$\frac{d}{dt}(g_{ij}\dot{x}^j) - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\dot{x}^i\dot{x}^j = 0$$

$$\ddot{x}^m + \Gamma_{ij}^m\dot{x}^i\dot{x}^j = 0 \qquad (\alpha')$$

En faisant

$$\frac{-\partial g_{ij}}{2\partial x^k} = \Gamma_{ij}^m$$

$$\frac{d}{dt}(g_{ij}\dot{x}^j) = \ddot{x}^m$$

(α') est bel et bien une géodésique.

[8] X. GRACIA, J. MARIN-SOLANO, M.C MUNOZ-LECANDA, *Some geometric aspects of variationnel calculs in constrained systems,* Rep. Math. Phys., 2003, p. 51.

CONCLUSION

Cet article présente en quelques lignes les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une courbe x=x(t) soit extrêmale d'une fonctionnelle.

$J = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x, \dot{x})dt$. Il s'agit, en outre de ressortir les concepts de base dans la recherche des courbes qui minimalisent ou maximalisent la fonctionnelle $J=\int_{t_0}^{t_1} L(t, x, \dot{x})dt$.

Les courbes qui minimalisent s'appellent géodésiques ou localement le plus court chemin entre deux points d'une surface.

La recherche des extrêmaux est d'actualité en mécanique de Lagrange, en géométrie variationelle,… Le chercheur en mathématique ainsi qu'en physique y trouvera son compte.

BIBLIOGRAPHIE

1. BUCATARU I., *Metric non linear connections. Diff Geometry and its Applications* 25, 335-343, 2007.
2. FARAH F., *Etudes des courbes extrêmales et optimales d'un Lagrangien régulier sur une distribution,* Thèse, Université de Savoie, 2009.
3. GRACIA X., MARIN-SOLANO J., MUNOZ-LECANDA M.C, *Some geometric aspects of variationnel calculs in constrained systems,* Rep. Math. Phys., 51(1):127-148, 2003.
4. GRIFONE J., MEHDI M., "On the geometry of Lagrangien mechanics with non-holonomie constraints", in *Journal of Geometry and physics* 30, 187, 203, 1999.
5. PANSU PIERRE, *Calcul des variations,* 12 juillet 2005.
6. TAWABA MUSIAN, *Géométrie différentielle,* L1 Math, UPN, 2005.
7. TEMO BEKO de LOSO F., « The Hamilton-formalism in calculs of variations : the second variation », in *Annales de la Faculté des Sciences,* PUK, numéro spécial 3, 1997.
8. ZELDOVITCH ą MYCHKIS (A), *Eléments de Mathématiques appliquées,* Mir, Moscou, 1974, 608 p.